УДК 519.852

ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ С ВЛОЖЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Л.Г. Афраймович, А.С. Катеров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

levafraimovich@gmail.com

Поступила в редакцию 20.01.2012

Рассматриваются многоиндексные задачи линейного программирования транспортного типа. Один из подходов к решению таких задач – сведение их к задаче поиска потока в сети. Описана концепция такого сведения, в основу которой положено соответствие между переменными исходной задачи и дугами вспомогательной сети. Ранее было показано, что условие 2-вложенности многоиндексных задач является достаточным условием сводимости. В работе доказано, что (в рамках рассматриваемой концепции сводимости) условие 2-вложенности является необходимым и достаточным условием сводимости в трех- и четырехиндексном случае.

Ключевые слова: линейное программирование, многоиндексные задачи, задачи транспортного типа, сводимость, потоковые алгоритмы.

Введение

Существует широкий класс прикладных задач распределения ресурсов, формализуемых в виде многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Примерами таких задач являются (см. [1–3]) задача объемно-календарного планирования для подразделений предприятия, задача формирования портфеля заказов, задача планирования и управления процессом переработки газового конденсата и др. Таким образом, разработка эффективных методов решения специального подкласса задач линейного программирования – многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа делает возможным сокращение вычислительных затрат при решении ряда важных большеразмерных прикладных задач.

Для решения рассматриваемых многоиндексных транспортных задач могут быть применены общие методы решения задач линейного программирования – симплекс-метод, алгоритм Кармаркара [4]. Также существует ряд работ, посвященных непосредственно методам решения многоиндексных задач линейного программирования. Наиболее изученным является класс двухиндексных задач [5]. В общей постановке многоиндексные задачи рассматриваются в [6]. Условия, при которых удается понизить размерность и (или) сократить количество индексов многоиндексных транспортных задач, обсуждаются в [7]. Геометрические свойства множества допустимых решений многоиндексных систем линейных неравенств обсуждаются в [8].

Интерес представляет решение целочисленных многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Как известно, двухиндексная задача целочисленного линейного программирования разрешима за полиномиальное время [5]. Однако данная задача является NP-трудной уже в трехиндексном случае [9]. Целочисленные многоиндексные транспортные задачи исследуются также в работах [10–12].

Одним из перспективных направлений при разработке эффективных алгоритмов исследования многоиндексных задач линейного программирования является нахождение подклассов задач, для решения которых применимы потоковые методы. Рассматриваемая в работе концепция сводимости класса задач линейного программирования к классу задач поиска потока минимальной стоимости была сформулирована в [13]. Важной особенностью данной концепции является существование соответствия между переменными исходной задачи и дугами вспомогательной сети. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольный оптимальный поток вспомогательной сети будет определять такое оптимальное решение исходной задачи, в котором переменным присваивается значение потока вдоль соответствующих дуг сети. В [1] было показано, что 2-вложенность многоиндексной задачи является достаточным условием сводимости. В случае выполнения условий 2-вложенности решение многоиндексной задачи линейного программирования транспортного типа сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(m+n)$ вершинами и $O(m+n)$ дугами, где n – количество переменных, m – количество неравенств системы ограничений исходной задачи. В [13] показано, что 2-вложенность является необходимым и достаточным условием сводимости (в рамках рассматриваемой схемы сведения) в трехиндексном случае, иначе P=NP.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1, 13]. В работе показано, что условие 2-вложенности является необходимым и достаточным условием сводимости (в рамках рассматриваемой схемы сведения) многоиндексных задач к классу задач поиска потока минимальной стоимости в трех- и четырехиндексном случае.

Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, предложенной в [6]. Пусть $s \in N$ и $N(s) = \{1, 2, \dots, s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который принимает значения из множества $J_l = \{1, 2, \dots, n_l\}$, где $n_l \geq 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, k_2, \dots, k_t\} \subseteq N(s)$; $k_i < k_{i+1}$, $i = \overline{1, t-1}$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t})_f$ будем называть t-индексом. Множество всех t-индексов, соответствующих f, определим как $E_f = \{F_f \mid F \in J_{k_1} \times J_{k_2} \times \dots \times J_{k_t}\}$. Там где это не вызывает неоднозначности, будем опускать нижний индекс f в записи t-индексов. Если $F_{f'} \in E_{f'}$, $F_{f''} \in E_{f''}$, где $f', f'' \subseteq N(s)$ и $f' \cap f'' = \varnothing$, то через $F_{f'}F_{f''}$ обозначим такой набор, что $F_{f'}F_{f''} \in E_{f' \cup f''}$. Далее определим $\overline{f} = N(s) \setminus f$, тогда согласно введенному обозначению $F_{N(s)} = F_f F_{\overline{f}}$.

Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Данное отображение множества t-индексов E_f в множество действительных чисел назовем (как и в [6]) t-индексной матрицей и обозначим через $\{z_{F_f}\}$. Рассмотрим s-индексную матрицу $\{z_{N(s)}\}$ и введем следующее обозначение

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\overline{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \dots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f F_{\overline{f}}}, \; F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}.$$

Введенное обозначение подсумм s-индексной матрицы будем использовать при формализации многоиндексных транспортных задач.

Пусть M – заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$; $\{a_{F_{\overline{f}}}\}$, $\{b_{F_{\overline{f}}}\}$ – заданные $|\overline{f}|$-индексные матрицы свободных коэффициентов, $0 \leq a_{F_{\overline{f}}} \leq b_{F_{\overline{f}}}$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, $f \in M$; $\{c_{F_{N(s)}}\}$ – заданная s-индексная матрица коэффициентов целевой функции; $\{x_{F_{N(s)}}\}$ – s-индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа формализуется следующим образом:

$$a_{F_{\overline{f}}} \leq \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\overline{f}}} \leq b_{F_{\overline{f}}}, \; F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, \; f \in M, \tag{1}$$

$$x_{F_{N(s)}} \geq 0, \; F_{N(s)} \in E_{N(s)}, \tag{2}$$

$$\sum_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \to \min. \tag{3}$$

Далее класс всех многоиндексных задач вида (1)–(3) при фиксированном множестве M будем обозначать $W(M)$. Матрицу системы ограничений (1) обозначим через $Matr(M, n_1, \dots, n_s)$, так как она однозначно определяется множеством M, а также количеством принимаемых значений для каждого индекса: $n_1, n_2, \dots, n_s$.

Для описания подматриц $Matr(M, n_1, \dots, n_s)$ будем использовать следующую схему. Ограничение вида (1), соответствующее фиксированному множеству $f \in M$ и фиксированному набору $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, обозначим $d(f, F_{\overline{f}})$. Строку матрицы $Matr(M, n_1, \dots, n_s)$, определяемую двусторонним неравенством $d(f, F_{\overline{f}})$, обозначим $row(f, F_{\overline{f}})$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, f \in M$. Столбец матрицы $Matr(M)$, соответствующий переменной $x_{F_{N(s)}}$, обозначим $col(F_{N(s)})$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$. Пусть заданы последовательности $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k_1)} \in M$, $F^{(1)}_{\overline{f^{(1)}}} \in E_{\overline{f^{(1)}}}, F^{(2)}_{\overline{f^{(2)}}} \in E_{\overline{f^{(2)}}}, \dots, F^{(k_1)}_{\overline{f^{(k_1)}}} \in E_{\overline{f^{(k_1)}}}$ и $F^{(1)}_{N(s)}$, $F^{(2)}_{N(s)}, \dots, F^{(k_2)}_{N(s)} \in E_{N(s)}$, тогда подматрицу, образованную элементами матрицы $Matr(M)$, находящимися на пересечении строк $row(f^{(i)}, F^{(i)}_{\overline{f^{(i)}}})$, $i = \overline{1, k_1}$, и столбцов $col(F^{(j)}_{N(s)})$, $j = \overline{1, k_2}$, будем обозначать $Matr((f^{(i)}, F^{(i)}_{\overline{f^{(i)}}}), i = \overline{1, k_1}; F^{(j)}_{N(s)}, j = \overline{1, k_2})$.

Концепция сводимости

Формализация общей концепции сводимости дана в работе [13]. Нас будет интересовать схема сведения многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска потока минимальной стоимости, при которой решение многоиндексной задачи может быть определено как подмножество компонент решения соответствующей потоковой задачи. Ниже приводится формализация соответствующей схемы сведения.

Пусть $A \in R^{n\times m}$, $b, b^-, b^+ \in R^n$, $c \in R^m$ – заданные параметры, $x \in R^m$ – вектор неизвестных. Через $w(A, b, c)$ будем обозначать задачу линейного программирования $\min\{(c,x) \mid Ax \le b, x \ge 0\}$; через $w(A, b^-, b^+, c)$ – задачу линейного программирования $\min\{(c,x) \mid b^- \le Ax \le b^+, x \ge 0\}$. Для удобства через $row(A)$ и $col(A)$ будем обозначать количество строк и столбцов матрицы A, соответственно. Отметим, что задача $w(A, b^-, b^+, c)$ может быть описана с использованием обозначения вида $w(A, b, c)$. Тем не менее будем использовать обозначение $w(A, b^-, b^+, c)$ в случае, когда хотим подчеркнуть, что система ограничений задачи представляет собой систему двусторонних неравенств. Пусть W – произвольный класс задач линейного программирования.

Определение 1. *Будем говорить, что класс* W' *является* $t_1 - s_1|\ t_2 - s_2|\ t_3 - s_3$ *сводимым к классу* W'', *если для любой задачи* $w' = w(A', b', c') \in W'$ *можно за время* $O(t_1)$ *построить матрицу* A'', *за время* $O(t_2)$ *построить векторы* b'', c'', *что* $w'' = w(A'', b'', c'') \in W''$ *и при этом:*

– *задача* w' *совместна* (*ограничена*) *тогда и только тогда, когда совместна* (*ограничена*) *задача* w'';

– *если известно оптимальное* (*допустимое*) *решение* x'' *задачи* w'', *то оптимальное* (*допустимое*) *решение* x' *задачи* w' *может быть построено за время* $O(t_3)$.

Здесь $(-\ s_1)$, $(-\ s_2)$, $(-\ s_3)$ – *опциональные строковые обозначения вычислительных процедур, связанных с построением матрицы системы ограничений, свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции и с построением решения задачи соответственно.*

Задачу w'' (см. определение 1) будем называть задачей, соответствующей задаче w'. Иногда для удобства функции оценки вычислительной сложности t_1, t_2, t_3 будем заменять на обозначения L или P, подразумевая линейные или полиномиальные от размера индивидуальной задачи w' функции, соответственно.

В данной работе исследуется возможность сведения класса многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска потока минимальной стоимости, который определяется следующим образом. Рассмотрим ориентированный граф $G = (V_G, A_G)$, $A_G \subseteq V_G^{\ 2}$, здесь V_G и A_G – множество вершин и дуг графа G соответственно. Пусть l_{ij}, u_{ij} – пропускные способности дуги (i, j); e_{ij} – стоимость дуги (i, j); x_{ij} – неизвестная величина потока вдоль дуги (i, j), $(i, j) \in A_G$. Тогда через $v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G)$ обозначим следующую задачу поиска потока минимальной стоимости:

$$\sum_{(i,j)\in A_G} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A_G} x_{ji} = 0,\ i \in V_G,$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij},\ (i, j) \in A_G,$$

$$x_{ij} \ge 0,\ (i, j) \in A_G,$$

$$\sum_{(i,j)\in A_G} e_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Обозначим через $Graph$ множество всех ориентированных графов. Класс задач поиска потока минимальной стоимости определим как

$$W_{Graph} = \{v(G, l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G) \mid l_{ij},$$
$$u_{ij} \in Z_+, e_{ij} \in Z, (i, j) \in A_G, G \in Graph\}.$$

Определение 2. *Пусть* W – *класс задач линейного программирования с двусторонней системой линейных неравенств. Будем говорить, что класс* W *является* $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ *сводимым к классу* W_{Graph}, *если класс* W *является* $t_1|t_2|t_3$ *сводимым к классу* W_{Graph}; *и если* $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G) \in W_{Graph}$ *является задачей, соответствующей задаче* $w = w(A, b^-, b^+, c) \in W$, *то выполняются следующие условия. Найдутся такие инъективные функции* $\alpha : \{1, 2, ..., row(A)\} \to A_G$, $\beta : \{1, 2, ..., col(A)\} \to A_G$, *что:*

– $l_{\alpha(i)} = b_i^-, u_{\alpha(i)} = b_i^+$, $i = \overline{1, row(A)}$; $l_{(u,v)} = 0$, $u_{uv} = b^*$, $(u, v) \in A_G \setminus \{\alpha(i) \mid i = \overline{1, row(A)}\}$, *где* b^* – *некоторая достаточно большая величина, для определенности* $b^* = \sum_{k=1}^{row(A)} b_k^+$;

– $e_{\beta(i)} = c_i$, $i = \overline{1, col(A)}$; $e_{uv} = 0$, $(u, v) \in A_G \setminus \{\beta(i) \mid i = \overline{1, col(A)}\}$;

– *если* x_{ij}, $(i, j) \in A_G$, *является оптимальным* (*допустимым*) *решением задачи* v, *то* $y = (x_{\beta(1)}, x_{\beta(2)}, ..., x_{\beta(col(A))})$ *будет являться оптимальным* (*допустимым*) *решением задачи* w.

Таким образом, согласно определению 2, в случае $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимости класса W к классу W_{Graph} гарантируется, что если $w \in W$, $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}, (i, j) \in A_G) \in W_{Graph}$ и v является задачей, соответствующей задаче w, то при построении задачи поиска потока минимальной стоимости v пропускные способности и стоимости дуг в задаче определяются через коэффициенты задачи w, а решение задачи w находится через подмножество компонент решения задачи v. Тогда можно предложить алгоритм решения задачи w, основанный на решении соответствующей задачи v и имеющий вычислительную сложность $O(t_1 + t_2 + t_3 + \mu(|V_G|, |A_G|))$, где $\mu(n, m)$ – вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска потока минимальной стоимости в сети с n вершинами и m дугами. Далее в работе рассматриваются условия, при которых класс $W(M)$ является $t_1|t_2$ – *equal*|t_3 – *edge* сводимым к классу W_{Graph}.

Исследование сводимости

Так как система ограничений (1) задач класса $W(M)$ определяется заданием множества $M, M \subseteq 2^{N(s)}$, будем решать задачу поиска таких множеств M, при которых класс задач $W(M)$ является $t_1|t_2$ – *equal*|t_3 – *edge* сводимым к классу W_{Graph}.

Определение 3. *Множество M называется k-вложенным, если существует разбиение множества M на k подмножеств* $M_i = \{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, ..., f_{m_i}^{(i)}\}$, $i = \overline{1,k}$, *что* $f_j^{(i)} \subset f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1,k}$.

Теорема 1 [1]. *Пусть* $M \subseteq 2^{N(s)}$. *Для того чтобы класс W(M) являлся L|L – equal|L – edge сводимым к классу W_{Graph}, достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным.*

Теорема 2 [14]. *Пусть* $M \subseteq 2^{N(s)}$. *Для того чтобы класс W(M) являлся $t_1|t_2$ – equal|t_3 – edge сводимым к классу W_{Graph}, необходимо, чтобы Matr(M, $n_1,\dots,n_s$)* для любых $n_1,\dots,n_s$ *была абсолютно унимодулярна.*

Утверждение 1 [15]. *Пусть s = 3, тогда множество M является 2-вложенным тогда и только тогда, когда* $|\{f \,||\, f| = k, f \in M\}| \le 2$, $k = \overline{0,s}$.

Теорема 3 [15]. *Множество M является 2-вложенным тогда и только тогда, когда для любых* $\{f_1, f_2, f_3\} \in M$ $\{f_1,f_2,f_3\}$ *– 2-вложенное.*

Проверка условий 2-вложенности в общем случае связана с перебором всех возможных разбиений множества M на два подмножества и имеет сложность $O(2^{|M|})$. Однако возможно исследовать 2-вложенность множества M проверив выполнение условий теоремы 3, т.е. перебрав все тройки элементов из M. Соответствующая проверка требует $O(|M|^3)$ вычислительных операций.

Определение 4. *Кодом множества* $M = \{f_1, f_2,\dots,f_k\}$, $M \subseteq 2^{N(s)}$, *будем называть вектор* $K = (l_1,l_2,\dots,l_k)$, $l_i = |f_i|$, $i = \overline{1,k}$.

Лемма 1. *Пусть s=3. Если множество* $M = \{f_1, f_2,\dots,f_k\}$ $M \subseteq 2^{N(s)}$, *не является 2-вложенным, то найдутся n_1, n_2, n_3, такие, что Matr(M, n_1,n_2,n_3) не абсолютно унимодулярна.*

Доказательство:

По утверждению 1 множество M может быть не 2-вложенным только для множеств, соответствующих следующим кодам:

1. $K = (1,1,1)$, тогда $M = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.
2. $K = (2,2,2)$, тогда $M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$.

Было установлено существование n_1,n_2,n_3, таких, что $Matr(M, n_1,n_2,n_3)$ не абсолютно унимодулярна для следующих множеств M: $M = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ (см. приложение). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $s = 4$. *Если множество* $M = \{f_1, f_2,\dots,f_k\}$, $M \subseteq 2^{N(s)}$, *не является 2-вложенным, то найдутся $n_1,\dots,n_4$, такие, что Matr(M, $n_1,\dots,n_4$) не абсолютно унимодулярна.*

Доказательство:

Так как M и все его элементы множества, выполняются следующие условия:

$$f_i \ne f_j \text{ для любых } i, j \in \{1,2,3\}, i \ne j, \qquad (6)$$

$f_j = \{k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, ..., k_{|f_j|}^{(j)}\}$, $j = \overline{1,3}$, тогда

$$k_i^{(j)} \ne k_l^{(j)} \text{ для любых } j \in \{1,2,3\}, i,l \in \{1,...,|f_j|\}, i \ne l. \qquad (7)$$

Рассмотрим все возможные коды множеств, состоящих из трёх элементов при $s = 4$, для каждого кода построим все возможные не 2-вложенные множества M.

- $K = (1,1,1)$:

$f_1 = \{i_1\}, f_2 = \{i_2\}, f_3 = \{i_3\}$, $i_j \in \{1,...,4\}, j = \overline{1,3}$.

Положим $M = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

- $K = (2,1,1)$:

$f_1 = \{i_1, i_2\}, f_2 = \{i_3\}, f_3 = \{i_4\}$, $i_j \in \{1,...,4\}, j = \overline{1,4}$.

Пусть $f_1 = \{1, 4\}$, тогда $i_3, i_4 \in \{1,2,3,4\} \setminus f_1 = \{2,3\}$, иначе M – 2-вложенное. Получаем $M = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$.

- $K = (2,2,1)$:

$f_1 = \{i_1, i_2\}$, $f_2 = \{i_3, i_4\}$, $f_3 = \{i_5\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,5}$.

Возможны 2 случая:

а) $f_1 \cap f_2 = \varnothing$, тогда $f_1 \cup f_2 = \{1,2,3,4\}$ и для любого $i_5 \in \{1,...,4\}$ M – 2-вложенное.

б) $|f_1 \cap f_2| = 1$, допустим $f_1 = \{1,4\}, f_2 = \{3,4\}$, тогда $i_5 \in \{1,2,3,4\} \setminus (f_1 \cup f_2) = \{2\}$, иначе M – 2-вложенное. Получаем $M = \{\{1,4\},\{3,4\},\{2\}\}$.

- $K = (2,2,2)$:

$f_1 = \{i_1, i_2\}, f_2 = \{i_3, i_4\}, f_3 = \{i_5, i_6\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,6}$.

Возможны 2 случая:

а) Найдутся $l, m \in \{1,2,3\}$, что $f_l \cap f_m = \varnothing$, предположим $f_1 = \{1,4\}, f_2 = \{2,3\}$, тогда $i_5 \in f_1$, $i_6 \in f_2$, иначе нарушится условие (6). Пусть $M = \{\{1,4\},\{2,3\},\{1,2\}\}$.

б) Для любых $l,m \in \{1,2,3\}$, $l \neq m$, $f_l \cap f_m \neq \varnothing$. Но тогда $|f_l \cap f_m| = 1$, $l,m \in \{1,2,3\}$, $l \neq m$. Пусть $f_1 = \{1,4\}, f_2 = \{2,4\}$. Допустимы 2 подслучая:

б1) $\{1,2,3,4\} \setminus (f_1 \cup f_2) = \{3\} \subseteq f_3$, то есть $i_5 = 3$, в этом случае $f_1 \cap f_2 \subseteq f_3$, тогда $M = \{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

б2) $\{1,2,3,4\} \setminus (f_1 \cup f_2) = \{3\} \not\subset f_3$, тогда $f_1 \cap f_3 = \{i'_1\}$, $f_2 \cap f_3 = \{i'_2\}$, $i'_1 \neq i'_2$, иначе нарушается условие (6) либо $\{3\} \subseteq f_3$. Единственное возможное множество $M = \{\{1,4\},\{2,4\},\{1,2\}\}$. Данное множество идентично с точностью до перестановки множеству $M' = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$, поэтому не нарушим общности рассуждений, если положим $M = M'$.

- $K = (3,1,1)$:

$f_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $f_2 = \{i_4\}$, $f_3 = \{i_5\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,5}$.

В таком случае $f_2 = \{1,\ldots,4\} \setminus f_1 = \{i'\}$, иначе M – 2-вложенное. Тогда $f_1 \cup f_2 = \{1,2,3,4\}$ и для любого $i_5 \in \{1,...,4\}$ либо M – 2-вложенное, либо $f_2 = f_3$. Таким образом, для данного кода не существует не 2-вложенного множества.

- $K = (3,2,1)$:

$f_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $f_2 = \{i_4, i_5\}$, $f_3 = \{i_6\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,6}$.

Аналогично случаю $K = (3,1,1)$.

- $K = (3,2,2)$:

$f_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $f_2 = \{i_4, i_5\}$, $f_3 = \{i_6, i_7\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,7}$.

Пусть $\{1,2,3,4\} \setminus f_1 = \{i'\}$, тогда $i' \in f_2, f_3$, иначе M – 2-вложенное. Пусть $i_4 = i'$ и $i_6 = i'$. При этом $i_5, i_7 \in f_1$, иначе нарушается условие (7), и $i_5 \neq i_7$, иначе нарушается условие (6).

Например, положим $f_1 = \{1,2,4\}$, при этом $i_4 = i_6 = 3$, а $i_5, i_7 \in f_1$. Возможным множеством будет $M = \{\{1,2,4\},\{2,3\},\{1,3\}\}$.

- $K = (3,3,1)$:

$f_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $f_2 = \{i_4, i_5, i_6\}$, $f_3 = \{i_7\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,7}$.

Аналогично случаю $K = (3,1,1)$.

- $K = (3,3,2)$:

$f_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $f_2 = \{i_4, i_5, i_6\}$, $f_3 = \{i_7, i_8\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,8}$.

Тогда $i'_1 \neq i'_2$, где $\{i'_1\} = \{1,2,3,4\} \setminus f_1$, $\{i'_2\} = \{1,2,3,4\} \setminus f_2$, при этом для любого $i \in \{1,...,4\}$, $i \neq i'_1$, $i \neq i'_2$ выполняется $i \in f_1 \cap f_2$. Тогда $f_3 = \{i'_1, i'_2\}$, иначе $f_3 \subseteq f_1$ или $f_3 \subseteq f_2$.

Например, пусть $f_1 = \{1,2,4\}, f_2 = \{2,3,4\}$, тогда $f_3 = \{3,4\}$. $M = \{\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3\}\}$.

- $K = (3,3,3)$:

$f_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $f_2 = \{i_4, i_5, i_6\}$, $f_3 = \{i_7, i_8, i_9\}$, $i_j \in \{1,...,4\}$, $j = \overline{1,9}$.

Тогда $i'_1 \neq i'_2$, где $\{i'_1\} = \{1,2,3,4\} \setminus f_1$, $\{i'_2\} = \{1,2,3,4\} \setminus f_2$, при этом для любого $i \in \{1,...,4\}$, $i \neq i'_1$, $i \neq i'_2$ выполняется $i \in f_1 \cap f_2$. Тогда $i_7 = i'_1$, $i_8 = i'_2$, иначе $f_3 = f_1$ или $f_3 = f_2$; $i_9 \in f_1 \cap f_2$.

Например, пусть $f_1 = \{1,2,4\}, f_2 = \{2,3,4\}$, тогда $f_3 = \{i,1,3\}$. Пусть $i = 4$, $M = \{\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$.

Таким образом, возможны только следующие не 2-вложенные множества $M = \{f_1, f_2, f_3\}$, $M \subseteq 2^{N(s)}$ при $s = 4$: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$; $\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$; $\{\{1,4\},\{3,4\},\{2\}\}$; $\{\{1,4\},\{2,3\},\{1,2\}\}$; $\{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}$; $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$; $\{\{1,2,4\},\{2,3\},\{1,3\}\}$; $\{\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3\}\}$; $\{\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$. Все остальные совпадают с приведенными с точностью до перенумерации элементов $N(s)$. Для каждого из приведённых множеств были найдены $n_1,\ldots,n_4$, при которых $Matr(M, n_1,\ldots,n_4)$ не абсолютно унимодулярна (см. приложение). Для случаев $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ и $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ были найдены n_1', n_2', n_3', при которых $Matr(M, n_1', n_2', n_3')$ не абсолютно унимодулярна, а следовательно, не абсолютно унимодулярна будет и $Matr(M, n_1', n_2', n_3', n_4)$ при любых n_4, так как $Matr(M, n_1', n_2', n_3')$ является её подматрицей. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $M \subseteq 2^{N(s)}, s \leq 4$. *Для того чтобы класс* $W(M)$ *являлся* $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ *сводимым к классу* W_{Graph}, *где* $t_1(n), t_2(n), t_3(n) \geq n$, $n \in N$, *необходимо и достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным.*

Доказательство:

Необходимость. При $s = \{1,2\}$ множество $2^{N(s)}$ является 2-вложенным, следовательно, любое его подмножество является 2-вложенным. Тогда, согласно теореме 1, класс $W(M)$ является $L|L - equal|L - edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

Далее пусть $s \in \{3,4\}$. Если множество M не 2-вложенное, то по теореме 3 существует не 2-вложенное множество $M' = \{f_1, f_2, f_3\}$, $M' \subseteq M$. Тогда найдутся $n_1,\ldots,n_s$ (согласно лемме 1 при $s = 3$ и лемме 2 при $s = 4$), такие, что $Matr(M', n_1,...,n_s)$ не является абсолютно унимодулярной. Так как $Matr(M', n_1,...,n_s)$ – подматрица $Matr(M, n_1,\ldots,n_s)$, то $Matr(M, n_1,\ldots,n_s)$ также не является абсолютно унимодулярной. Отсюда по теореме 2 класс задач $W(M)$ не является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу

W_{Graph}. Если множество M 2-вложенное, то, согласно теореме 1, класс $W(M)$ является $L|L-equal|L-edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

Достаточность. Автоматически следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Таким образом, доказательство теоремы 4 удалось описать путём перебора всех возможных множеств вида $\{f_1, f_2, f_3\}$. Однако такой способ доказательства будет неэффективен при $s \geq 5$ в связи с ростом числа множеств вида $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Заключение

В представленной работе исследован класс трех- и четырехиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Рассмотрены вопросы сводимости многоиндексных задач к классу задач поиска потока в сети. В рамках исследуемой схемы сведения показано, что для класса многоиндексных задач с числом индексов, не превосходящим 4, условие 2-вложенности множества, определяющего систему ограничений, является одновременно необходимым и достаточным условием сводимости к классу задач поиска потока минимальной стоимости.

Данные результаты обобщают исследования, проведённые в [1, 13]. В дальнейшем планируется исследовать сводимость многоиндексных транспортных задач линейного программирования к классу задач поиска потока в древовидных сетях.

Приложение

В рамках проведённых исследований была разработана параллельная программная система, которая по заданным множеству M, а также $n_1,\ldots,n_s$ строит $Matr(M, n_1,\ldots,n_s)$. Далее проверяется абсолютная унимодулярность построенной матрицы, таким образом определяется выполнение необходимого условия сводимости теоремы 2. Данная программная система запускалась на суперЭВМ МП-20 (РФЯЦ–ВНИИЭФ, г. Саров).

$$M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$$

$$H_1 = Matr(\,(\{1,2\},(1)_{\{3\}}),(\{1,3\},(1)_{\{2\}}),(\{2,3\},(1)_{\{1\}});\ (1,1,2)_{N(3)},(1,2,1)_{N(3)},(2,1,1)_{N(3)})$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(H_1) = 2;$$

$$M = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

$$H_2 = Matr((\{1\},(1,3)_{\{2,3\}}),(\{1\},(2,2)_{\{2,3\}}),(\{1\},(2,3)_{\{2,3\}}),(\{3\},(1,1)_{\{1,2\}}),(\{3\},(2,2)_{\{1,2\}})),$$
$$(\{2\},(1,2)_{\{1,3\}}),(\{2\},(3,3)_{\{1,3\}});$$
$$(1,1,2)_{N(3)},(1,1,3)_{N(3)},(1,2,2)_{N(3)},(2,2,2)_{N(3)},(2,2,3)_{N(3)},(3,1,3)_{N(3)},(3,2,3)_{N(3)})$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(H_2) = 2;$$

$$M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\}$$

$$H_3 = Matr((\{1,2\},(1,1)_{\{3,4\}}),(\{2,3\},(1,1)_{\{1,4\}}),(\{2,3\},(1,2)_{\{1,4\}}),(\{1,4\},(1,1)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(1,2)_{\{2,3\}});$$
$$(1,1,1,2)_{N(4)},(1,1,2,1)_{N(4)},(1,1,2,2)_{N(4)},(1,2,1,1)_{N(4)},(2,1,1,1)_{N(4)})$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H_3 = -2$$

$$M = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$$

$$H = Matr((\{1,4\},(1,3)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(2,2)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(2,3)_{\{2,3\}}),(\{3\},(1,1,1)_{\{1,2,4\}}),(\{3\},(2,2,1)_{\{1,2,4\}})),$$
$$(\{2\},(1,2,1)_{\{1,3,4\}}),(\{2\},(3,3,1)_{\{1,3,4\}});$$
$$(1,1,2,1)_{N(4)},(1,1,3,1)_{N(4)},(1,2,2,1)_{N(4)},(2,2,2,1)_{N(4)},(2,2,3,1)_{N(4)},(3,1,3,1)_{N(4)},(3,2,3,1)_{N(4)})$$

$$H = H_2,\ \det(H) = 2$$

$$M = \{\{1,4\},\{3,4\},\{2\}\}$$

$$H = Matr((\{1,4\},(1,3)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(2,2)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(2,3)_{\{2,3\}}),(\{3,4\},(1,1)_{\{1,2\}}),(\{3,4\},(2,2)_{\{1,2\}})),$$
$$(\{2\},(1,2,1)_{\{1,3,4\}}),(\{2\},(3,3,1)_{\{1,3,4\}});$$
$$(1,1,2,1)_{N(4)},(1,1,3,1)_{N(4)},(1,2,2,1)_{N(4)},(2,2,2,1)_{N(4)},(2,2,3,1)_{N(4)},(3,1,3,1)_{N(4)},(3,2,3,1)_{N(4)})$$

$$H = H_2,\ \det(H) = 2$$

$$M = \{\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

$$H = Matr((\{1,4\},(1,3)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(2,2)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(2,3)_{\{2,3\}}),(\{3,4\},(1,1)_{\{1,2\}}),(\{3,4\},(2,2)_{\{1,2\}})),$$
$$(\{2,4\},(1,2)_{\{1,3\}}),(\{2\},(3,3)_{\{1,3\}});$$
$$(1,1,2,1)_{N(4)},(1,1,3,1)_{N(4)},(1,2,2,1)_{N(4)},(2,2,2,1)_{N(4)},(2,2,3,1)_{N(4)},(3,1,3,1)_{N(4)},(3,2,3,1)_{N(4)})$$

$$H = H_2,\ \det(H) = 2$$

$$M = \{\{1,2,4\},\{2,3\},\{1,3\}\}$$

$$H = Matr((\{1,2,4\},(1)_{\{3\}}),(\{1,3\},(1,1)_{\{2,4\}}),$$
$$(\{2,3\},(1,1)_{\{1,4\}});$$
$$(1,1,2,1)_{N(4)},(1,2,1,1)_{N(4)},(2,1,1,1)_{N(4)})$$

$$H = H_1,\ \det(H) = 2$$

$$M = \{\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3\}\}$$

$$H= Matr((\{1,2,4\},(1)_{\{3\}}),(\{1,3\},(1,1)_{\{2,4\}}),(\{2,3,4\},$$
$$(1)_{\{1\}});(1,1,2,1)_{N(4)},(1,2,1,1)_{N(4)},(2,1,1,1)_{N(4)})$$

$$H = H_1,\ \det(H) = 2$$

$$M = \{\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\}\}$$

$$H= Matr((\{1,2,4\},(1)_{\{3\}}),(\{1,3,4\},(1)_{\{2\}}),(\{2,3,4\},$$
$$(1)_{\{1\}});(1,1,2,1)_{N(4)},(1,2,1,1)_{N(4)},(2,1,1,1)_{N(4)})$$

$$H = H_1,\ \det(H) = 2$$

Список литературы

1. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 6. С. 194–205.
2. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 148–155.
3. Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е. Оптимизационные задачи объёмно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий // Системы управления и информационные технологии. 2007. №2.1 (28). С. 188–192.
4. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. М.: Мир, 1991.
5. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М.: Мир, 1969.
6. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
7. Junginger W. On representatives of multi-index transportation problems // Europ J. of Operational Research. 1993. V. 66 (3). P. 353–371.
8. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
9. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
10. Spieksma F.C.R. Multi-index assignment problems: complexity, approximation, applications / in: P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 1–11.
11. Сергеев С.И. Новые нижние границы для трипланарной задачи назначения. Использование классической модели // Автоматика и телемеханика. 2008. № 12. С. 53–75.
12. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В. Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2006. Т. 13. № 1. С. 10–26.
13. Афраймович Л.Г. Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 109–120.
14. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 57–63.
15. Катеров А.С. Исследование сводимости трёхиндексных транспортных задач к поиску потока в сети с применением параллельных вычислений // Прикладная информатика и математическое моделирование: Межвузовский сборник научных трудов. М.: МГУП им. Ивана Фёдорова, 2011. С. 47–57.

THREE- AND FOUR-INDEX PROBLEMS WITH NESTED STRUCTURE

L.G. Afraimovich*, *A.S. Katerov

Multi-index linear programming transport type problems are considered. One of the approaches to solving such problems is to reduce them to flow algorithms. We describe a concept of this reduction which is based on correspondence between the variables of the original problem and the arcs of an auxiliary network. It was previously shown that two-nested structure of multi-index problems is a sufficient condition for reducibility. In this paper, we prove that the two-nested structure (in the framework of the reducibility concept considered) is a necessary and sufficient condition for reducibility in the cases of three- and four-index problems.

Keywords: linear programming, multi-index problems, transport type problems, reducibility, flow algorithms.